Espaces vectoriels

1

Exercice 1. $E=\{f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\exists T\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R},f(x+T)=f(x)\}$

Exercice 2. $E=\{f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), f\text{ bornées}\}$

Exercice 3. $E=\{f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), f\text{ majorées}\}$

Exercice 4. $E=\{u_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_n\to 0\}$

Exercice 5. Soient $s\in[1;+\infty[$ et $I=[a;b]$. Soit $f\in C^\infty(I;\mathbb{R})$. Pour $n\in\mathbb{N}$ on note $f^{(n)}$ la dérivée énième. f est dite dans le classe de Gevrey d'odre s s'il existe $C>0$ et $R>0$ tels que:

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in I,|f^{(n)}(x)|\leq C\frac{(n!)^s}{R^n}$$

On notera alors $f\in\mathfrak{G}^s(I)$.

Montrer que $\mathfrak{G}^s(I)$ est un espace vectoriel.

2

Exercice 6. Famille libre ou liée ?: $(\cos^2(x),\sin^2(x),\cos(2x))$

Exercice 7. Famille libre ou liée ?: $(\cos(x),\cos(x+1))$

Exercice 8. Famille libre ou liée ?: $(\cos^i(x))_{1\leqslant i\leqslant n}$

Exercice 9. Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une famille libre. Montrer que si l'on définit v_i par:

$$v_i=\sum_{k=1}^{i}e_k$$

alors la famille $(v_1,\ldots,v_n)$ est libre.

Exercice 10. Soient v_1, v_2 et v_3 trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que (v_1,v_2) est une famille libre, (v_1,v_3) est une famille libre, et (v_3,v_2) est une famille libre. La famille (v_1,v_2,v_3) est-elle nécessairement une famille libre ?

3

Exercice 11. $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y-2z=0\}$, espace vectoriel ? dimension ? base ?

Exercice 12. $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y+z=1\}$, espace vectoriel ? dimension ? base ?

Exercice 13. $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z - t = 0\}$, espace vectoriel ? dimension ? base ?

Exercice 14. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0, 2x - y - z = 0\}$, espace vectoriel ? dimension ? base ?

Exercice 15. $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0, x - y + 2z - 2t = 0\}$, espace vectoriel ? dimension ? base ?

4

Exercice 16. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante est un espace vectoriel:

$$y'' - 4y' - 4y = 0$$

Résoudre cette équation.

Que pouvez vous dire de l'équation différentielle suivante ?

$$y'' + \sin(y) = 0$$

Solution.

5. Toute fonction continue sur un segment est bornée, inégalité triangulaire, mise au même dénominateur avec $R = \min(R_1, R_2)$.

10. Non.

15. $= \mathbb{R}^4$